**Rotación hiperbólica**

Si tienes la circunferencia unitaria representada por la ecuación x^2 + y^2 = 1, puedes parametrizarla de la siguiente manera: x = cos(t), e y = sin(t). Estas dos funciones, seno y coseno, se llaman “funciones trigonométricas”, o “funciones circulares”, y reciben un parámetro t, que es un ángulo.

Análogamente, si tienes la hipérbola unitaria x^2 \*menos\* y^2 = 1, la curva que está al lado derecho de este gráfico la puedes parametrizar con unas funciones que llamaremos “seno” y “coseno” hiperbólicos. Entonces, x = cosh(t), e y = sinh(t). Estas funciones se llaman “funciones hiperbólicas”, y el parámetro t es algo llamado “ángulo hiperbólico”.

Antes de poder explicar qué son y cómo funcionan las funciones hiperbólicas, tenemos que saber: ¿qué es un ángulo hiperbólico?

Eso es lo que vamos a averiguar en este video sobre “rotaciones hiperbólicas”.

---

En el video anterior, expliqué por qué el área bajo la hipérbola y = 1/x era un logaritmo. Para la explicación mencioné el concepto de “rotación hiperbólica”, así que voy a profundizar más en ella.

Repasando, la hipérbola y = 1/x se puede reescribir como xy = 1. Si tienes un punto cuya coordenada horizontal es x y su coordenada vertical es y, entonces xy viene a ser el producto de ambas coordenadas, que se puede visualizar como el área de este rectángulo. Entonces la ecuación xy = 1 la satisfacen todos los puntos que hagan que esta área sea igual a 1. Si un punto tiene una coordenada x, para que el área sea igual a 1 la coordenada y debe ser igual a 1/x.

¿Qué pasa si duplico la coordenada x? Se duplica el ancho del rectángulo, duplicándose así su área. Para hacer que esta siga siendo 1, la coordenada y debe reducirse a la mitad.

Si ahora divido x por 3, el área también, así que para arreglar esto debemos triplicar la coordenada y.

En general, si multiplico x por una constante lambda positiva, debo multiplicar y por 1/lambda para conservar el área del rectángulo.

Todos los puntos (x, y) que cumplan esta ecuación xy = 1 forman la siguiente curva, que es una hipérbola.

---

En general, en vez de tener la ecuación xy = 1, podría ser xy igual a cualquier constante positiva c. Lo que representa esta nueva ecuación, es a todos los puntos (x, y) que forman un rectángulo cuya área es c. Si su componente horizontal es x, su componente vertical debe ser c/x.

Y acá se aplica exactamente lo mismo de antes: si multiplico x por una constante lambda > 0, entonces y debe multiplicarse por 1/lambda, para conservar el área.

Los puntos que cumplen esta ecuación van a formar otra hipérbola, cuyo tamaño depende de c. Aquí se grafican varias hipérbolas de la forma xy = c, donde c toma varios valores enteros.

-

Lo realmente interesante de todo esto es la parte en donde, si escalas x por una constante lambda, debes escalar y por 1/lambda. Esto permite definir una transformación muy especial: dado un punto (x, y), lo transformamos en el punto (lambda\*x, y/lambda), donde lambda es mayor que 0. SI vamos ajustando el valor de lambda, este punto va recorriendo una hipérbola.

Ahora, si tomo un arco de esta hipérbola, y aplico esta transformación sobre todos sus puntos, estos van a seguir en la hipérbola, y el resultado es otro arco en la misma hipérbola. Si en vez de un arco tomo la hipérbola completa, al transformarla obtengo la misma hipérbola.

Si esta transformación la aplicamos en todo el plano cartesiano, esta cuadrícula se deforma, se estira por un lado y se comprime por el otro.

Pero, si en este plano dibujo varias hipérbolas de ecuación xy = cte, todas estas van a conservarse cuando aplique esta transformación.

Esta transformación, que recuerda un poco a una rotación, la llamamos “rotación hiperbólica”. Lo que hace es escalar el eje x por un escalar lambda, y el eje y por 1/lambda, mapeando un punto (x, y) a un punto (lambda\*x, y/lambda). La gracia de esta rotación es que: 1, conserva todas las áreas, y 2, conserva las hipérbolas de la forma xy = cte.

Para comparar, la “rotación tradicional” o “rotación circular” toma un punto y lo transforma, recorriendo un arco de circunferencia en el camino. La gracia de esta rotación, es que conserva las circunferencias. Observa:

Entonces, esta rotación, también conserva todas las áreas, y conserva las circunferencias de la forma x^2 + y^2 = cte.